**13.Дифференцирование и интегрирование степенного ряда**Пусть-- степенной ряд с радиусом сходимости R.Лемма 1. Ряд (1) мажорируем на любом отрезке [a,b] лежащем в интервале сходимости.Доказательство. Случай http://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_410ff75a.gifотбросим как тривиальный. Найдемhttp://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_m957f0b2.gifтакое, чтоhttp://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_m4cf04e70.gif. Тогдаhttp://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_3d1123cd.gifесть мажоранта ряда (1) на отрезке , а значит и на отрезкеhttp://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_m62b36f0e.gif.□Лемма 2.Рядhttp://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_620fdc0d.gif, полученный из ряда (1) почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.Доказательство в предположении, что существует предел отношения http://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_864862b.gifследует из равенства

http://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_m41b3acb0.gif  
Теорема.Пустьhttp://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_mb93dfec.gif-- сумма ряда (1) на интервалеhttp://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_m1b4e3dcf.gif. Функция бесконечно дифференцируема на этом интервале и её k-ая производная равна сумме k-ых производных членов ряда (1):

http://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_2b8cb21d.gif  
При этом ряд, стоящий в правой части (2) имеет тот же радиус сходимости R. Далее,

http://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_39cdff.gif  
Кроме того, ряд (1) можно почленно интегрировать на любом отрезке , лежащем в интервале сходимости. В частности,

http://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_md14770d.gif  
для любого http://www.studfiles.ru/html/2706/468/html_4MkkFrcf9l.HsPo/htmlconvd-fc0bLF_html_61eb14c2.gifи ряд, стоящий в правой части (4), имеет тот же радиус сходимости .